suivante : on tire une première boule

- Si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on tire la deuxième boule.
- Si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne et on tire la deuxième boule.

1/ Soit X la variable aléatoire qui, à chaque épreuve, associe le nombre de fois où l'on obtient une boule blanche.

a- Donner la loi de probabilité de X.

b- Calculer son espérance mathématique.

2/ Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque épreuve associe le produit des nombres marqués sur les deux boules obtenues.
Donner la loi de probabilité de Y.

PROBLEME

A- Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}$

1/ Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

2/a- Montrer qu'il existe un réel α unique tel que : $0 < \alpha < 1$ et $f(\alpha)=0$.

b- En déduire le signe de f(x) pour $x \geq \alpha$.

3/ Soit un réel λ tel que $\alpha \leq \lambda$. On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \lambda$.

a- Calculer $A(\lambda)$.

b- Trouver la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

B- Dans cette partie, n désigne un entier naturel non. On se propose de déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$.

1/ Déterminer, en utilisant les variations de la fonction f, que

$$\text{Log}(n+1)-\text{Log}(n) \leq \frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2} \qquad (1)$$

En déduire que : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$.

2/ Démontrer alors que : $u_{n+1} \leq u_n e^{-\frac{1}{4n}}$.

et en déduire que : $u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$.

3/ Démontrer en utilisant la relation (1) de la première question de la partie **B-** du problème, que : $\text{Log}(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

et en déduire que : $u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\text{Log}(n+1)}$.

4/ Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.